

Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»



УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе

/Д.С. Гуц/

«30» октября 2023 года

ПРОГРАММА

вступительного испытания для поступающих в аспирантуру

1.1 Математика и механика

шифр и наименование группы научных специальностей

1.1.5 Математическая логика, алгебра, теория чисел

и дискретная математика

шифр и наименование научной специальности

Красноярск 2023

Настоящая программа вступительного экзамена состоит из общей и специальной частей.

Общая часть содержит основные вопросы из действительного и комплексного анализа, топологии, дифференциальных уравнений, математической физики, алгебры, геометрии и теории вероятностей, которыми должен свободно владеть каждый, желающий поступить в аспирантуру по научной специальности «Математика и механика».

Вторая (специальная) часть содержит дополнительные вопросы по специальности, читаемые как в общих, так и специальных курсах лекций.

1. Перечень вопросов общей части.

1.1. Понятие топологического пространства. Непрерывные отображения топологических пространств, компактность.

1.2. Понятие метрического пространства. Полные метрические пространства. Принцип сжимающих отображений и его применения.

1.3. Мера Лебега. Измеримые функции и их свойства. Интеграл Лебега и его основные свойства. Предельный переход под знаком интеграла Лебега.

1.4. Гильбертовы пространства. Ортогональные системы функций. Полные системы, критерий полноты. Неравенство Бесселя. Сходимость рядов Фурье в гильбертовом пространстве. Равенство Парсеваля.

1.5. Линейные интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода.

1.6. Линейные пространства и их подпространства. Базис, размерность. Теорема о ранге матрицы. Системы линейных уравнений. Теорема Кронеккера Капелли.

1.7. Билинейные и квадратичные формы в линейных пространствах. Приведение квадратичных форм к нормальному виду. Закон инерции.

1.8. Линейные отображения в линейных пространствах. Приведение матрицы линейного оператора к жордановой форме. Собственные векторы и собственные значения.

1.9. Группы. Подгруппы. Порядок элемента. Циклические группы. Факторгруппа. Теорема о гомоморфизме. Идеал и факторкольцо кольца.

1.10. Дифференциальные уравнения первого порядка. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.

1.11. Линейные дифференциальные уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами.

1.12. Линейные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка, их классификация. Задача Дирихле для уравнения Лапласа.

1.13. Элементарные функции комплексного переменного и связанные с ними конформные отображения. Дробно-линейные функции. Простейшие многозначные функции.

1.14. Теорема Коши об интеграле по замкнутому контуру. Интеграл Коши. Ряд Тейлора. Ряд Лорана. Изолированные особые точки аналитических функций.

1.15. Первая и вторая квадратичные формы поверхности. Нормальная кривизна поверхности. Геодезические линии. Формула Эйлера. Гауссова кривизна поверхности.

1.16. Понятие о простейшей проблеме вариационного исчисления. Уравнение Эйлера.

1.17. Схема Бернулли. Теорема Муавра-Лапласа.

1.18. Закон больших чисел. Центральная предельная теорема.

2. Перечень вопросов специальной части.

2.1 Математическая логика.

2.1.1. Логика высказываний. Исчисление высказываний, его корректность и полнота.

2.1.2. Логика предикатов первого порядка: язык, интерпретации, модели. Теорема компактности, теорема Левенгейма - Скулема. Исчисление предикатов первого порядка, его корректность.

2.1.3. Теорема Геделя о полноте исчисления предикатов первого порядка. Нестандартные модели арифметики.

2.1.4. Теории первого порядка. Полные теории. Категоричные в данной мощности теории. Разрешимые теории. Категоричность в счетной мощности теории плотного порядка без первого и последнего элементов.

2.1.5. Парадоксы наивной теории множеств. Аксиоматическая теория множеств. Аксиома выбора. Вполне упорядоченные множества и теорема Цермело. Лемма Цорна. Континуум-гипотеза.

2.1.6. Общее понятие алгоритма. Варианты формализации понятия алгоритма. Универсальный алгоритм. Вычислимые функции, перечислимые и разрешимые множества. Неразрешимые алгоритмические проблемы. Теорема Раиса.

2.1.7. Первая теорема Геделя о неполноте формальной арифметики. Неразрешимость формальной арифметики. Теорема Тарского о невыразимости арифметической истинности в арифметике. Теорема Черча о неразрешимости логики предикатов.

2.1.8. Время и память как меры сложности вычислений. Классы P, NP и PSPACE. Полиномиальная сводимость. NP-полные проблемы.

2.2. Алгебра.

2.2.1. Основные алгебраические системы с одной и двумя бинарными операциями (группы, полугруппы, ассоциативные кольца и алгебры Ли) и их подсистемы. Смежные классы группы по подгруппе. Теорема Лагранжа.

2.2.2. Нормальные подгруппы и классы сопряженных элементов. Теоремы о гомоморфизмах групп и колец. Центр и коммутант группы.

2.2.3. Простые, разрешимые и нильпотентные группы. Теоремы Силова.

2.2.4. Образующие элементы и определяющие соотношения групп. Алгоритмические проблемы для конечно определенных групп.

2.2.5. Конечно порожденные абелевы группы, конечно порожденные модули и кольца главных идеалов. Теория жордановой нормальной формы.

2.2.6. Конечные поля. Поля алгебраических чисел.

2.2.7. Нетеровы кольца. Теорема Гильберта о базисе.

2.2.8. Представления групп. Теорема Кэли. Лемма Шура и теорема Машке. Характеры представлений. Определяемость представления своим характером. Представления конечных групп.

2.3. Теория чисел

2.3.1. Основная теорема арифметики. Важнейшие арифметические функции. Теоремы Эйлера и Ферма.

2.3.2. Сравнения и их свойства. Сравнения с одной неизвестной.

2.3.3. Сравнения второй степени. Сравнения высших степеней.

2.3.4. Квадратичный закон взаимности. Первообразные корни, индексы.

2.4. Дискретная математика

2.4.1. Формула включений-исключений и ее приложения (мультипликативность функции Эйлера и др.).

2.4.2. Теорема Бернсайда о числе орбит действия группы на множестве; следствия для числа классов сопряженности конечной группы и др.

2.4.3. Приложения полуполей и квазиполей к построению недезарговых проективных плоскостей трансляций.

2.4.4. Понятие базиса для булевых функций. Теорема Поста о полноте системы булевых функций.

2.4.5. Теорема Эйлера о плоских графах. Гипотеза Ловача о гамильтоновости графов Кэли. Раскрашивание графов. Хроматические многочлены.

Список рекомендованных источников.

1. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н.Колмогоров, С.В.Фомин. - М.: Физматлит, 2006.
2. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. В 3 т. / Л.Д.Кудрявцев. - М.: Высшая школа, 1985.
3. Курош А.Г. Курс высшей алгебры /А.Г.Курош. - М.: Лань, 2007.
4. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры / А.И.Мальцев. - М: Лань, 2009.
5. Маркушевич А.И. Введение в теорию аналитических функций. В 2 Т. / А.И. Маркушевич. - М: Наука, 1978.
6. Никольский С.М. Курс математического анализа. В 2 т. / С.М.Никольский, - М.: Физматлит, 2001.
7. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными / И.Г.Петровский. - М.: Наука, 1970.
8. Нефедов В.Н. Курс дискретной математики : учебное пособие для вузов, обучающихся по специальности "Прикладная математика" / В. Н. Нефедов, В. А. Осипова. - Москва : МАИ, 1992. - 263 с. 13. Нефедов В.Н. , Осипова В.А., Курс дискретной математики.
9. Уилсон Р.Дж. Введение в теорию графов. М.: Диалектика, 2019.
- 10.Каргаполов М.И. Основы теории групп / М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков. - 3-е изд., перераб. и доп. - Москва : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1982. - 288 с.
- 11.Кострикин А.И. Введение в алгебру. Основы алгебры : учебник для вузов / А. И. Кострикин. - Москва : Физматлит, 1994.
- 12.Ершов Ю.Л. Математическая логика / Ю. Л. Ершов, Е. А. Палютин. - 6, испр. - Москва : Издательская фирма "Физико-математическая литература" (ФИЗМАТЛИТ), 2011. - 356 с.
- 13.Боревич З.И. Теория чисел / З. И. Боревич, И. Р. Шафаревич. - Изд. 3-е, доп. - Москва : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1985. - 503 с.

Составитель программы:

д-р физ.-мат. наук, профессор,
зав. кафедрой АМЛ



В.М. Левчук

Директор института математики
и фундаментальной информатики



Черепанова О.Н.